

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Prvi ispit – 20. lipnja 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje i geometrijskog pribora.

Zadatak 1. U trokutu ABC , neka je D točka na stranici \overline{BC} takva da je AD simetrala kuta $\angle BAC$. Pravac kroz vrh C koji je paralelan sa AD siječe pravac AB u točki E .

- (a) Dokažite da je $\triangle ACE$ jednakokračan trokut.
(b) Koristeći $AD \parallel CE$ i prikladne slične trokute, dokažite *Teorem o simetrali kuta* koji tvrdi:

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|CA|}.$$

- (c) Neka je I središte upisane kružnice u $\triangle ABC$. Dokažite

$$\frac{|AI|}{|ID|} = \frac{|CA| + |AB|}{|BC|}.$$

Zadatak 2. Dan je pravilni šesterokut $ABCDEF$. Neka je A' točka centralnosimetrična točki A u odnosu na vrh C , a M polovište dužine $\overline{CA'}$. Ako je K sjecište pravaca FM i BD , odredite omjer $|BK| : |KD|$.

Zadatak 3. Odredite sve realne brojeve λ takve da je pravac

$$p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y-2\lambda}{3} = \frac{z+\lambda}{\lambda}$$

paralelan s ravninom $\pi \dots 5x - 2y + (\lambda - 4)z = 7$. Potom odredite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac p i paralelna je s π .

Zadatak 4. Neka je F fokus parabole, T tjeme parabole i P proizvoljna točka na paraboli, ako se tangente na parabolu u T i P sijeku u točki Q dokažite da je $\angle PQF = 90^\circ$.

Zadatak 5. Dana je krivulja

$$C : x^2 + 2y^2 + xy - x - y = 6.$$

- (a) Je li C elipsa, hiperbola ili parabola? Obrazložite.
(b) Odredite neku racionalnu parametrizaciju od C .